

結合半點法與等參幾何法分析浮體水動力性能

王奕杰* 石惠予** 關百宸***¹

*國立臺灣海洋大學 系統工程暨造船學系

**財團法人船舶暨海洋產業研發中心

***國立臺灣海洋大學 延平水下科技中心

關鍵詞：非均勻有理 B 樣條、等參幾何法、半點法、水動力分析

摘要

在模擬計算物體在流場中的水動力分析中，為了克服傳統 Hess-Smith 小板法因離散化而引起的幾何改變問題，已有相關研究開始使用能更精準描述幾何曲面的非均勻有理 B-spline (NURBS) 函數作為幾何近似。本研究室先前已實現使用 NURBS 函數進行幾何描述的高階小板法，結合 Hughes 所發展之針對 NURBS 函數的最佳化積分方法—半點法(half-point rule)，用於水動力分析。本次研究在該基礎上加入以 NURBS 函數作為物理場近似的等參幾何法(IGA)，透過使用相同的 NURBS 形函數實現幾何與物理場的統一，並結合邊界元素法(BEM)來求解勢流問題，進行浮體的水動力性能分析。

在基礎 IGA 方法中，是以參數空間之節點向量作為積分區域劃分。而半點法(half-point rule)藉由 NURBS 函數的連續性在跨單元上佈置積分點，可以用更少的積分網格與積分點描述物體的幾何形狀與物理場分佈，達成加速分析流程與簡化計算步驟的效果。等參幾何法 (IGA) 將物理場使用描述幾何的同一個 NURBS 函數進行近似，並透過將 NURBS 曲面控制點上的物理量內插到積分點上，避免了在源強度計算中，當場點和源點重疊時計算所產生的格林函數奇異性。最後，透過浸沒球體與圓筒的算例，比對在 NURBS 函數控制值數量加密的狀況下，在規則波中頻域的水動力係數有無收斂趨勢，初步驗證該計算方法的可行性。

前言

近年來隨著海洋工程領域發展與電腦的強大運算能力，以數值模擬進行海洋工程工况模擬與評估逐漸成為業界常態，而在流體模擬分析中，當浮體在水中運動時，要考慮的水動力包含流體靜力、波浪激振力以及輻射力，輻射力由水動力係數計算而來。現有的商業軟體大多使用傳統的 Hess-Smith 小板法計算水動力性能，然而小板法為線性單元，在曲面上幾何的描述有所失真，為了修正該偏差必須增加網格單元數量，產生大量積分點而大幅增加計算成本。因此本研究目的為透過能統一並精準描述幾何與物理場的等參幾何法(IGA)，結合利用 NURBS 函數單元連續性提出之半點法(Halfpoint-rule)優化積分法，建立一套不需要劃分網格與少量積分點的快速水動力性能計算流程，並為後續進行浮體幾何非線性運動分析之目標打下理論與程式基礎。

流場速度勢為複雜的流體動力問題，為了求解流場速度勢，Frank[3]在 1967 提出源點分佈法來求解邊界問題的流體勢流，概念為利用格林函數在浮體表面分佈等強度源點，利用邊界條件求解浮體表面源強度並作積分求得勢流來計算流體動力係數，Newman[4]進一步合併除物體表面邊界條件以外的邊界條件，統合出自由表面格林函數，但在頻域中

自由表面格林函數於零與無限頻率有奇異解，Mackay[20]提出修正格林函數，新的函數在奇異處與極限解一致，使其可應用至全頻域的分析上。Hess 等人[1]在 1964 年提出了小板法，該方法將浮體表面離散為複數四邊形小板，並在小板上佈置了等強度的源點計算流體速度勢，小板法後來也被廣泛運用在各種三維的勢流問題中。在源點分佈法中，當場點和源點位置重疊時，格林函數會趨近無窮大並產生奇異點，為了避免奇異點，Liu 等人[5]以及 Eatock Taylor 等人[7]將場點以高斯積分點代替，並利用等參化投影的概念，將母空間的積分點映射到物理空間的四邊形小板上，可以較多的高斯積分點提升計算精度。Cao 等人[6][18]開發了一種去奇異技術，將源點放置在場點上方，避免了點位重合造成的格林函數奇異積分的問題。Chen[16]在研究中推導出，當朗肯源點和場點位於同一面板時， $1/r$ 在面板上的積分是可積的。

NURBS 函數為現今描述和電腦建模的標準工具，能精準的描述複雜幾何與無理數多項式，因此被廣泛使用在幾何近似上，如 Ren 等人[11]在 2008 年使用 NURBS 函數精確描述半潛式濕表面，從而提高了水動力計算的精度，以及在 2013 年被 Belibassakis[14]等人運用在小板法中，處理船舶的波浪阻力問題。基於 NURBS 函數，T.J.R. Hughes

¹ 關百宸 (paichen@mail.ntou.edu.tw)

等人[10]於 2005 年所提出等參幾何法，後續等參幾何法是建立在有限元素法的架構下，傳統網格法需要劃分較細緻的網格，才能在複雜幾何形狀得到較精準的答案，而等參幾何法的物體表面以 NURBS(non-uniform rational b-splines)作為近似形函數，透過統一幾何與物理場描述省去網格繪製時間且能精準分析幾何形狀複雜的結構體。由於源點分配法需要計算大量點與點間的函數，減少配置點數可大幅降低成本，本計畫藉由 NURBS 函數的幾何連續性，引入 Hughes[12]在 2010 年提出的半點法(half-point rule)減少高斯積分點數量來節省計算時間，Rypl[13]的研究也驗證了半點法可透過減少積分點而有效節省計算時間，解決隨時間更新水動力係數的耗時問題。

本文以 NURBS 函數作為物理場近似的等參幾何法(IGA)，透過使用相同的 NURBS 形函數實現幾何與物理場的統一，引入半點法用更少的積分網格與積分點描述物體的幾何形狀與物理場分佈，後續統稱為 IGA 半點法。以該方法結合邊界元素法(BEM)來求解勢流問題，進行浮體的水動力性能分析，最後，透過浸沒球體與圓筒的算例，比對在 NURBS 函數控制值數量加密的狀況下，在規則波中頻域的水動力係數有無收斂趨勢，初步驗證該計算方法的可行性。

等參幾何法用於浮體運動分析

1. 流體動力學

本研究採用線性流體動力學理論，考慮輻射波以及衍射波來描述流體和結構互制的行為，在勢流理論的基本假設下，流場速度勢 ϕ 需滿足拉普拉斯方程式(Laplace equation)

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z, t) = 0 \quad (1)$$

對於浮體的流場來說，其速度勢可分為入射勢、輻射勢與衍射勢，後兩者可統合成擾動勢。經上述分類轉換，式(2)為波浪的總速度勢。

$$\Phi = \left[(\phi_\omega + \phi_d) + \sum_{k=1}^6 \phi_{rk} x_k \right] e^{-i\omega t} \quad (2)$$

其中 ϕ_ω 為波浪未受浮體擾動影響的入射勢、 ϕ_j 為浮體運動產生的輻射勢、 ϕ_d 為波浪穿過浮體後，反射所產生的衍射勢。

此外，流場域內的速度勢需滿足以下邊界條件，包含自由液面邊界條件(Linear free surface equation)(3)、物體表面邊界條件(Body surface condi-

tions)(4)(5)、底部表面邊界條件(Seabed surface condition)(6)以及遠場波浪輻射條件(Far field radiation conditions)(7)

$$-\omega^2 \phi_k + g \frac{\partial \phi_k}{\partial z} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 6, d, \quad \text{at } z = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial n} = -i\omega n_j, \quad j, k = 1, 2, \dots, 6, \quad \text{on } S_0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_\omega}{\partial n} \quad \text{on } S_0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial n} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, 6, d \quad z = -d \quad (6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial r} - ik \phi_k \right) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, 6, d \quad (7)$$

其中 $k=1, 2, \dots, 6$ 代表輻射問題的六個自由度(1到6分別為縱移、橫移、起伏、橫搖、縱搖和平擺)， $k=d$ 時代表衍射問題。為了解決上述控制條件的流體速度勢，本研究引入自由表面頻域格林函數，該格林函數代表一單位脈動源流，此源流滿足拉普拉斯方程式(Laplace equation)，也滿足自由液面邊界條件(3)、底部表面邊界條件(6)、遠場波浪輻射條件(7)，如下列所示：

$$\nabla^2 G(\bar{p}, \bar{q}, \omega) = \delta(x-x')(y-y')(z-z') \quad (8)$$

其中 $\bar{p} = (x, y, z)$ 為場點位置、 $\bar{q} = (x', y', z')$ 為源點位置。本研究使用的格林函數參考了 Mackay[20]研究之式(9)格林函數，該格林函數消除了額外於零與無限頻率定義格林函數的必要性，使其可應用於全頻域上。

$$G(\bar{p}, \bar{q}, \omega) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \int_0^\infty \frac{2(k+v) \cosh[k(z+d)] \cosh[k(z+d)]}{k \sinh(kd) - v \cosh(kd)} e^{-kd} J_0(kR) dk \quad (9)$$

$$+ i2\pi \frac{(k_0+v) e^{-k_0 d} \cosh[k_0(z+d)] \cosh[k_0(z'+d)]}{\sinh(k_0 d) + k_0 d \cosh(k_0 d) - v d \sinh(k_0 d)} J_0(k_0 d)$$

$$v = \frac{\omega^2}{g} = k_0 \tanh(k_0 d) \quad (10)$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (11)$$

$$r_1 = \sqrt{R^2 + (z-z')^2} \quad (12)$$

$$r_2 = \sqrt{R^2 + (z+z'-2d)^2} \quad (13)$$

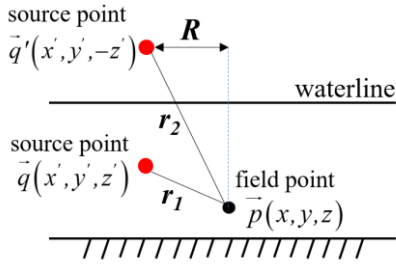


圖 1 格林函數之空間參數定義

式(9)中的 J_0 為 Bessel function 第一類解， r_1 為場點到源點的距離、 r_2 為場點到源點的水面鏡射點距離，其中 ν 為波頻率 ω 和波數 k_0 之間的關係。利用格林定理，並引入平均濕表面上的源分佈，衍射波和輻射波的速度勢 ϕ 可表示為濕表面上的源強度 σ 和格林函數的乘積，如式(14)所示：

$$\phi_k(\bar{p}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \sigma_k(\bar{q}) G(\bar{p}, \bar{q}, \omega) dS \quad (14)$$

其中 S_0 為浮體的水下濕表面積，場點和源點都位於浮體表面上。而濕表面上的源強度可以由式(4)給出的浮體表面邊界條件，經由式(15)求得。在本研究中，格林函數的導數利用式(16)插分求得，如圖 2 所示。

$$-\frac{1}{2} \sigma_k(\bar{p}) + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \sigma_k(\bar{q}) \frac{\partial G(\bar{p}, \bar{q}, \omega)}{\partial n(\bar{p})} dS = \frac{\partial \phi_k(\bar{p})}{\partial n(\bar{p})} \quad (15)$$

$$\frac{\partial G(\bar{p}_i, \bar{q}_j, \omega)}{\partial n_i} = \frac{G(\bar{p}_i^{n_1}, \bar{q}_j, \omega) - G(\bar{p}_i^{n_2}, \bar{q}_j, \omega)}{2\Delta r} \quad (16)$$

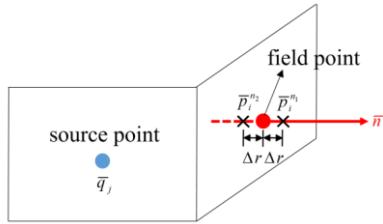


圖 2 格林函數導數求解示意圖

已知流體的速度勢後，可透過式(17)到式(19)求出表面的流體動壓力：

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = i\omega \rho \phi e^{-i\omega t} \quad (17)$$

$$F_j e^{-i\omega t} = -\int_{S_0} p n_j dS = \left(-i\omega \rho \int_{S_0} \phi n_j dS \right) e^{-i\omega t} \quad (18)$$

$$F_j = (F_{\omega j} + F_{d j}) + \sum_{k=1}^6 F_{rjk} x_k \quad j = 1, 6 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} F_{rjk} &= -i\omega \rho \int_{S_0} \phi_{rk} n dS \\ &= -i\omega \rho \int_{S_0} \{ \text{Re}[\phi_{rk}] + i \text{Im}[\phi_{rk}] \} n dS \\ &= \omega^2 A_{jk} + i\omega B_{jk} \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $F_{\omega j}$ 為入射波力、 $F_{d j}$ 為衍射波力、 $\sum_{k=1}^6 F_{rjk} x_k$ 為輻射波力即水動力，將 F_{rjk} 拆為實部 A_{jk} 和虛部 B_{jk} ，其分別代表式(21)之附加質量與式(22)之輻射阻尼，即為本研究目標之水動力係數。

$$A_{jk} = -\rho \int_{S_0} n_k \text{Im}(\phi_j) dS \quad (21)$$

$$B_{jk} = -\rho \int_{S_0} n_k \text{Re}(\phi_j) dS \quad (22)$$

2. B-spline 與 NURBS 函數

B-spline 函數是由 B-spline 基函數線性組合之多項式曲線函數，透過式(23)之遞增實數組合之節點向量 Ξ 建構出參數空間的座標。在節點向量的組成中分為兩種形式，分別為開放式節點向量(open knots)與非開放式節點向量(non-open knots)，開放節點向量的規則為第一個及最後一個節點重複 $p+1$ 次，並在此頭尾兩個節點上有 Kronecker δ 特性 (Kronecker delta property)，反之則稱為非開放節點向量。而在電腦輔助設計中，大多採用開放式節點向量寫入標準文件，因此本研究使用的節點向量亦採用開放式節點向量。式(24)為 B-spline 基函數，透過式(25)即可遞迴求得所需階數之 B-spline 函數，而 B-spline 基函數的微分則可透過式(26)處理，其中 ξ_i 代表節點向量中第幾個節點， p 代表基函數的階數， ξ 為代入之參數空間座標，開放式節點向量構建之各階 B-spline 函數範例如圖 3 所示。最後，將 B-spline 基函數與真實空間之控制點組合，即可內插出貼合曲線/面的任意位置座標。

$$\Xi = \{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1} \} \quad (23)$$

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (24)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (25)$$

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (26)$$

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (27)$$

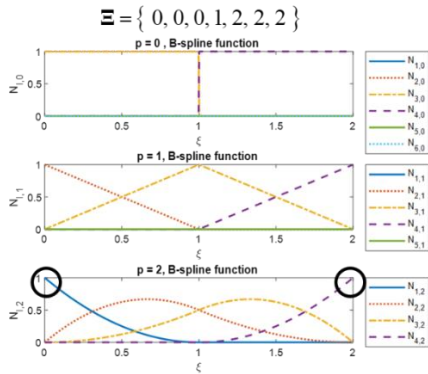


圖 3 開放式節點向量之二階 B-spline 函數示意圖

NURBS 函數是由 B-spline 函數進一步發展而成，對每個控制點如式(28)引入權重，因而推導出之 NURBS 函數與幾何曲線分別為式(29)和式(30)，而二維參數空間之 NURBS 函數與幾何曲線則為式(31)與式(32)。透過上述操作，NURBS 函數能如圖 4 所示，進一步近似非有理多項式與複雜幾何。

$$B_i^w = [w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i] \quad (28)$$

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (29)$$

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p} B_i \quad (30)$$

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (31)$$

$$C(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) B_{i,j} \quad (32)$$

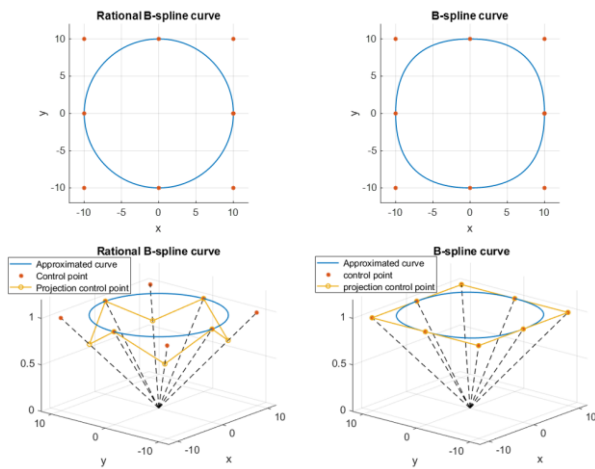


圖 4 B-spline 與 NURBS 對圓形描述之比較

3. 等參幾何法(IGA)

傳統等參幾何法將空間分為物理空間 xyz 、參數空間 uv 與高斯空間 rs ，參數空間為節點向量張出的空間，等參幾何法將幾何場與函數場均建立在參數空間中，再透過 NURBS 函數配合控制點(control point)將參數空間投影至物理空間中，而高斯空間則是作為參數空間中單元的積分投影。可將網格分為控制網格(control mesh)和物理網格(physical mesh)，其中控制網格是由控制點所組成，物理網格和元素則跟有限元素法中的一樣，但節點值需透過 NURBS 函數將控制點投影回物理網格上，因此在等參幾何法中所求的解為控制點值並非求解網格上的節點值，在等參幾何法中，各空間、網格和單元的關係如圖 5 所示。

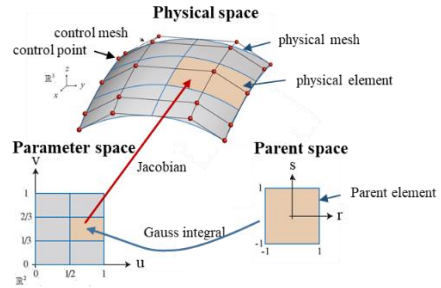


圖 5 等參幾何法中近似關係圖[10]

因為透過式(4)已知確切點位的物體表面邊界條件，本研究使用的權重殘差之數值方法為配點法(collocation point method)，強制使配點符合控制方程式之強形式。由於等參幾何法的控制值對配點位置較為敏感，配點位置需要機制挑選，而 Greville 於 1964 年的研究中提出透過節點向量內插出 NURBS 函數最大值在參數空間建立之配點法對求解之控制值有可靠的收斂性與穩定性，並且算法簡單直觀且可控，在二維參數空間中，其規則如式(33)所示。

$$\begin{aligned} \xi_i' &= (\xi_{i+1} + \xi_{i+2} + \dots + \xi_{i+p}) / p \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \eta_j' &= (\eta_{j+1} + \eta_{j+2} + \dots + \eta_{j+p}) / q \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (33)$$

本研究引入等參幾何法求解勢流問題，求解水下濕表面控制點的速度勢控制值。將式(33)之配點投影至物理空間中做為場點，以選定之積分規則積分點作為源點，使用等參幾何法將式(15)與式(14)改寫為式(34)與式(35)，首先構建線性系統求解未知源強度控制值 σ ，將控制值透過 NURBS 函數內插至貼合曲面的積分點上，求得積分點之六自由度速度勢 ϕ_k ，最後透過式(36)數值積分求得該系統之水動

力係數。下列式(34)到(36)中， \bar{p} 為配置之場點， \bar{q} 為將積分點視為源點， ξ, η 為參數空間座標， $\det(\mathbf{J})$ 為參數空間至物理空間的 Jacobian 投影， w 為積分規則之權重， n_k 為點位於幾何曲面上的六自由度法向量分量。

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{cp} R_{i,p}(\xi_{\bar{p}}, \eta_{\bar{p}}) \sigma_{ik} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{NINT} \sum_{i=1}^{cp} R_{i,p}(\xi_{\bar{q}_j}, \eta_{\bar{q}_j}) \sigma_{ik} \frac{\partial G(\bar{p}, \bar{q}_j, \omega)}{\partial n(\bar{p})} \det(\mathbf{J}_j) w_j = -i\omega n_k(\bar{p}) \quad (34)$$

$$\phi_k(\bar{q}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{NINT} \sum_{i=1}^{cp} R_{i,p}(\xi_{\bar{q}_j}, \eta_{\bar{q}_j}) \sigma_{ik} G(\bar{q}, \bar{q}_j, \omega) \det(\mathbf{J}_j) w_j \quad (35)$$

$$A_{jk} = -\frac{\rho}{\omega} \sum_{i=1}^{NINT} \text{Im}(\phi_{ik}) n_{ik} \det(\mathbf{J}_i) w_i \quad (36)$$

$$B_{jk} = -\rho \sum_{i=1}^{NINT} \text{Re}(\phi_{ik}) n_{ik} \det(\mathbf{J}_i) w_i$$

4. 半點法積分規則

Hughes[12]指出對於 B-spline 函數，精準的高斯積分不一定是最佳的積分方法，因為高階的 NURBS 函數和 B-spline 在跨單元邊界上有一定的平滑度，因此在同一網格下，和 C^0 連續性的有限單元相比，其基函數(base function)和自由度數量較少。對上述概念以簡單範例作說明，假設[-1,1]由兩個單元[-1,0]和[0,1]組成，在每個單元上的基函數為二次多項式，並且在{0}處沒有連續性。定義在[-1,1]的基函數由下列六條函數組成，如下列所示：

$$\varphi_1(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in [-1, 1] \quad (37)$$

$$\varphi_2(\xi) = \begin{cases} -1 & \forall \xi \in [-1, 0] \\ 1 & \forall \xi \in [0, 1] \end{cases} \quad (38)$$

$$\varphi_3(\xi) = \xi \quad \forall \xi \in [-1, 1] \quad (39)$$

$$\varphi_4(\xi) = \begin{cases} -\xi & \forall \xi \in [-1, 0] \\ \xi & \forall \xi \in [0, 1] \end{cases} \quad (40)$$

$$\varphi_5(\xi) = \xi^2 \quad \forall \xi \in [-1, 1] \quad (41)$$

$$\varphi_6(\xi) = \begin{cases} -\xi^2 & \forall \xi \in [-1, 0] \\ \xi^2 & \forall \xi \in [0, 1] \end{cases} \quad (42)$$

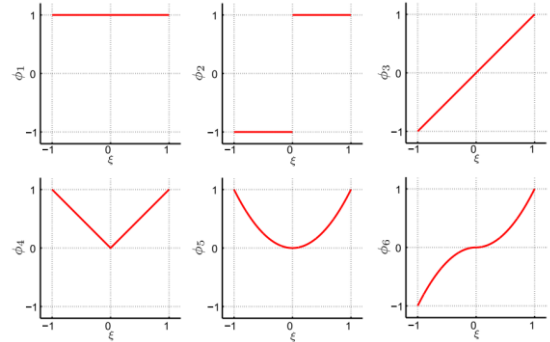


圖 6 在區間[-1,1]上的 C^1 (不連續)二次多項基函數 [12]

在{0}處沒有連續性時，最優積分方法為在[-1,1]之間的兩個單元都採用 2 點高斯積分，因此總共有四個積分點。若考慮{0}處符合 C^0 連續性，則基函數 φ_2 因不符合 C^0 連續性而被刪除，此時剩下五個基函數，積分點為三點，其積分點位置 ξ 和權重 w 分別為 $\{\xi; w\} = \{-2/3, 0, 2/3; 3/4, 1/2, 3/4\}$ 。若考慮 C^1 連續性時，則基函數 φ_4 因其在 0 處的一階導數不同而消除，此時剩下四個基函數，積分點為兩點。下列整理了 p 階函數在考慮 C^k 連續性時，其最佳的積分點數量如圖 7 所示。而因為 p 階 NURBS 函數具備 C^{p-1} 連續性，因此可利用上述概念減少積分點數量。

k	p	
	Even	Odd
-1	$p+2$	$p+1$
Even		$p+1-k/2$
Odd		$p+1-(k+1)/2$

圖 7 在區間[-1,1]上精確積分具備 C^k 連續性的 p 階分段多項式所需的積分點數 $(-1 \leq k \leq p-1)$ [12]

數值算例

本文以浸沒球體與圓柱作為初步算例驗證，球體算例比對解析解與 Chen[7]之小板法結果，浸沒圓筒則使用 23664 個小板的 Ansys AQWA 頻域分析結果作為解析解，比對各頻域之水動力係數趨勢。

1. 球體算例

首先以球體的附加質量與解析解做比較。由於球體相對於質心的三個正交軸對稱，因此所有的附加慣性矩(例如： A_{44} 、 A_{55})均為零，並且縱移、橫移以及起伏的附加質量(A_{11} 、 A_{22} 、 A_{33})數值相同，如式(43)所示。無因次化的附加質量如式(44)所示。球體半徑為 1 公尺，海床深 1000 公尺，浸沒水面下 10 公尺，使用小板法的 AQWA 球體模型與結果參考自 Chen 等人[9]的研究，每個小板自帶 1 個積分點。IGA 引入半點法的模型使用 Rhino 建模，由六個 NURBS 曲面組成，以每個曲面帶有的控制點數

量分為三個模型，分別為 16 個控制點、25 個控制點、36 個控制點，半點法積分總點數分別為 54 點、96 點、150 點。透過表 1 與表 2 間的比較，可以觀察到半點法 IGA 僅需些許加密即可和小板法有相同誤差，計算效率有顯著的增加。

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \frac{2\pi\rho a^3}{3} \quad (43)$$

$$A_{11}' = A_{22}' = A_{33}' = \frac{3\pi\rho a^3 A_{11}}{4} \quad (44)$$

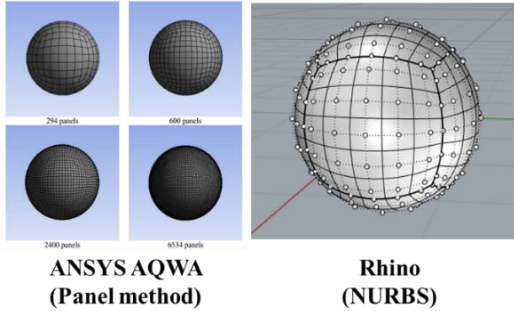


圖 8 小板法與 NURBS 球體建模

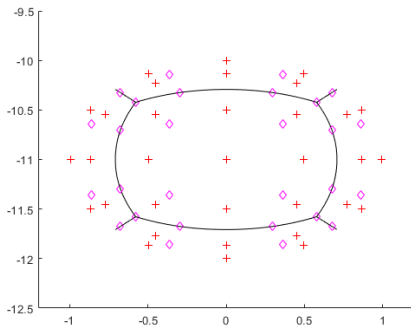


圖 9 曲面控制點 = 16 之球體場點源點分布

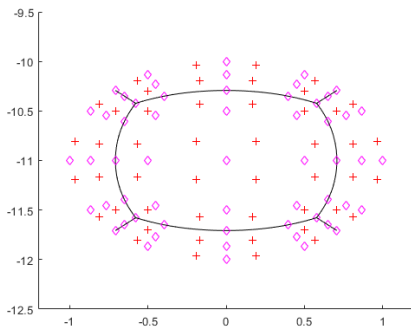


圖 10 曲面控制點 = 25 之球體場點源點分布

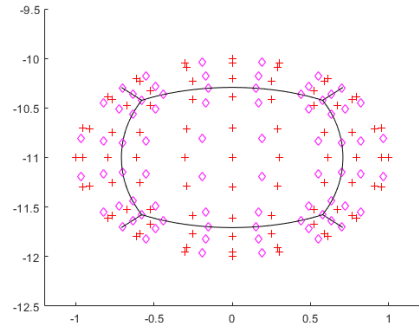


圖 11 控制點 = 36 之球體場點源點分布

表 1 半點法 IGA – 浸沒球體之無因次化附加質量

Number of integration point	A11'	Error(%)
54	0.464	7.2
96	0.475	5.0
150	0.487	2.6
Theory	0.5	-

表 2 小板法 – 浸沒球體之無因次化附加質量

Number of integration point	A11'	Error(%)
294	0.523	4.6
600	0.517	3.5
1656	0.513	2.6
Theory	0.5	-

2. 圓筒算例

圓筒算例的模型尺寸如圖 12 所示，海床深 50 公尺，頻域範圍為 0.1~3.14 (rad/s)，總共 20 個頻率。IGA 模型由 9 個 NURBS 曲面組成，同球體依單一曲面控制點數分為三個模型，分別為 16 個控制點、25 個控制點、36 個控制點，比對的參數為縱移、橫移以及起伏的附加質量(A11、A22、A33)與輻射阻尼(B11、B22、B33)，取 Ansys AQWA 分析 23664 個小板的分析結果作為解析解，附加質量如圖 16 至圖 18 所示，輻射阻尼如圖 19 至圖 21 所示，與 AQWA 結果之平均相對殘差如表 3 所列，附加質量有一常數偏差，而輻射阻尼貼合曲線並具收斂性，推測是因使用的自由表面格林函數不一致使其產生不同的結果。

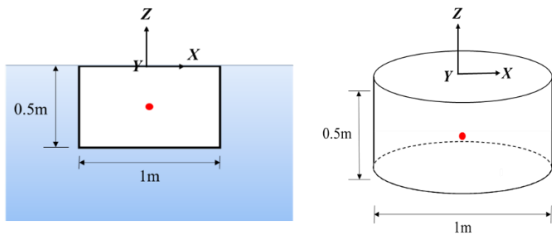


圖 12 圓筒浮體幾何

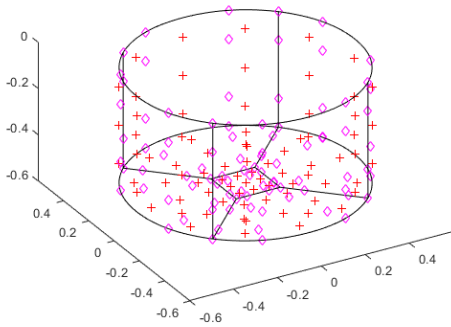


圖 13 曲面控制點 = 16 之圓筒場點源點分布

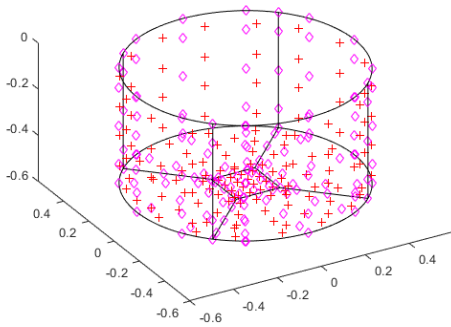


圖 14 曲面控制點 = 25 之圓筒場點源點分布

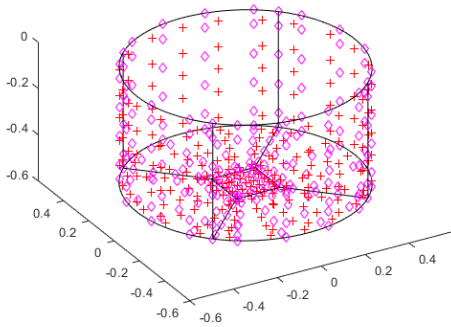


圖 15 曲面控制點 = 36 之圓筒場點源點分布

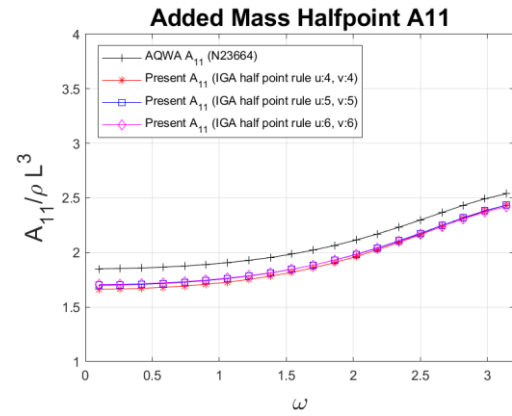


圖 16 圓筒算例 – A11 頻域附加質量分布

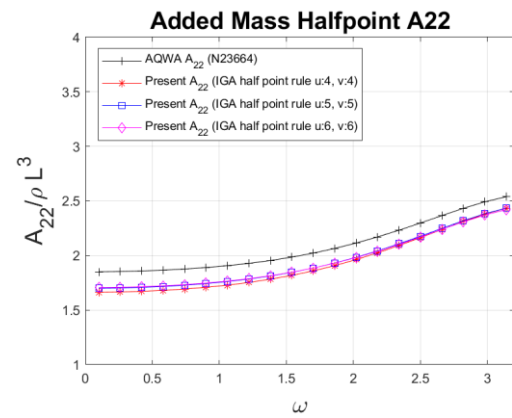


圖 17 圓筒算例 – A22 頻域附加質量分布

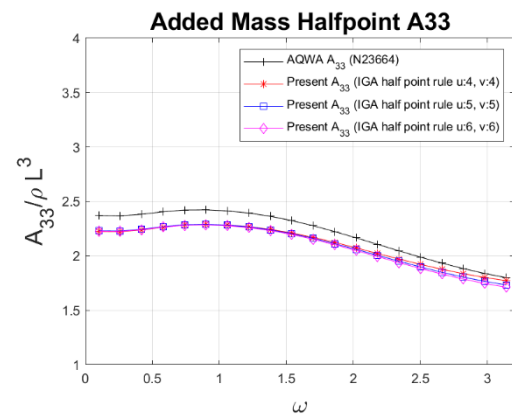


圖 18 圓筒算例 – A33 頻域附加質量分布

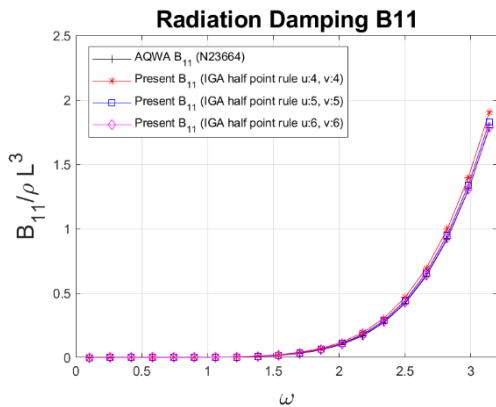


圖 19 圓筒算例 – B11 頻域輻射阻尼分布

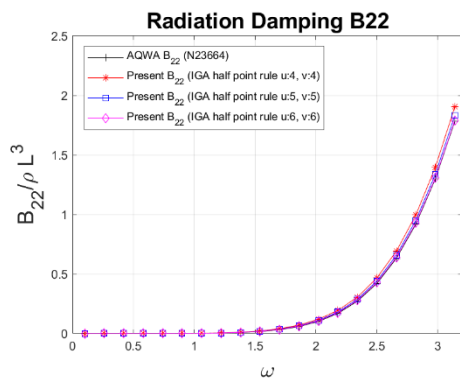


圖 20 圓筒算例 – B22 頻域輻射阻尼分布

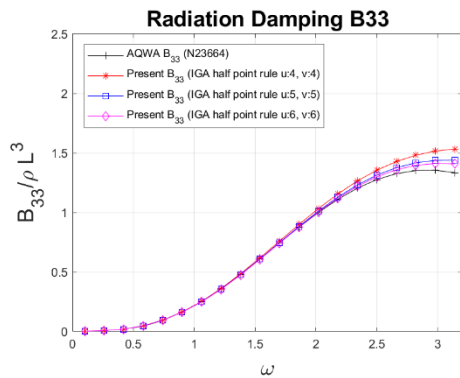


圖 21 圓筒算例 – B33 頻域輻射阻尼分布

表 3 不同控制點案例之相對殘差

	A11	A22	A33	B11	B22	B33
u:4 v:4	8%	8%	4%	14%	14%	7%
u:5 v:5	8%	7%	5%	6%	6%	3%
u:6 v:6	7%	7%	5%	3%	3%	2%

結論與展望

透過以上研究結果，可得以下之結論：

1. 本研究初步成功結合半點法積分規則與等參幾何法，透過配點法求解出未知源強度控制值，進而內插出 NURBS 曲面上之流體速度勢，求解出系統水動力係數。
2. 從球體算例比較中，IGA 半點法僅需極少積分點即可達成小板法之精準度，計算成本相對大幅下降。
3. 在圓筒算例中，附加質量與小板法的解有些許常數偏移，但是輻射阻尼項卻貼合小板法並表現出收斂性，推測為使用之自由表面格林函數與 AQWA 之小板法不一致所致。

未來預計使用 IGA 半點法進行更深更廣泛的應用，挖掘該方法的可能性，諸如：

1. 使用 IGA 半點法分析其他複雜幾何問題，於不同狀況下之運算效率、收斂性問題統計。
2. 分析隨時域波浪變化之物體表面的非線性分析，由於需要隨時域動態更新浮體水線面積，應用 IGA 半點法加速水動力係數之運算效率
3. 使用 IGA 半點法計算出流體水動壓，執行流固耦合分析，建構一條龍的浮台模擬與設計評估流程。

參考文獻

1. Hess, J. L., & Smith, A. M. O. (1964). Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies. *Journal of ship research*, 8(04), 22-44.
2. Greville, T. N. (1964). Numerical procedures for interpolation by spline functions. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis*, 1(1), 53-68.
3. Frank, W. (1967). Oscillation of cylinders in or below the free surface of deep fluids. *Naval Ship Research and Development Center Report, N0.2375*, Bethesda, Maryland.
4. Newman, J. N. (1985). Algorithms for the free-surface Green function. *Journal of engineering mathematics*, 19(1), 57-67.
5. Liu, Y. H., & Lu, X. S. (1988). Polar coordinate transformation approach for treatment of singular integrals in boundary element methods. *Applied Mathematics and Mechanics*, 9(10), 959-967.
6. Cao, Y., Schultz, W., Beck, R. (1991). Three-dimensional desingularized boundary integral methods for potential problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluid.* 12 (8), 785-803.
7. Eatock Taylor, R., Chau, F. (1992). Wave diffraction theory: some developments in linear and nonlinear theory. *J. Offshore Mech. Arctic Eng.* 114 (3), 185-194.
8. Fang, C. C. (1996). An Investigation of Motions of Catamarans in Regular Waves: Submitted as a Thesis for the Degree of Doctor of Philosophy, Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, University of Glasgow (Doctoral dissertation, University of Glasgow).

9. Qiu, W., & Hsiung, C. C. (2002). A panel-free method for time-domain analysis of the radiation problem. *Ocean Engineering*, 29(12), 1555-1567.
10. Hughes, T. J., Cottrell, J. A., & Bazilevs, Y. (2005). Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(39-41), 4135-4195.
11. Ren, H. L., & Liu, W. X. (2008). Calculation of hydrodynamics for semi-submersibles based on NURBS. *Journal of Marine Science and Application*, 7(2), 91-97.
12. Hughes, T. J., Reali, A., & Sangalli, G. (2010). Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 199(5-8), 301-313.
13. Rypl, D., & Patzák, B. (2012). Study of computational efficiency of numerical quadrature schemes in the isogeometric analysis. *Engineering Mechanics*, 304.
14. Belibassakis, K. A., Gerostathis, T. P., Kostas, K. V., Politis, C. G., Kaklis, P. D., Ginnis, A. I., & Feurer, C. (2013). A BEM-isogeometric method for the ship wave-resistance problem. *Ocean Engineering*, 60, 53-67.
15. Ansys, A. Q. W. A. (2013). AQWA theory manual. AQWA: Canonsburg, PA, USA.
16. Chen, Z.-M. (2014). Regular wave integral approach to the prediction of hydrodynamic performance of submerged spheroid. *Wave Motion* 51 (2), 193-205
17. Khair Al-Solihat, M., & Nahon, M. (2015). Nonlinear hydrostatic restoring of floating platforms. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 10(4), 041005.
18. Cao, Y., Beck, R.F. (2016). Desingularized boundary integral equations and their applications in wave dynamics and wavebody interaction problems. *J. Ocean Eng. Sci.* 1 (1), 11-29.
19. Chen, C. W., & Yan, N. M. (2017). Prediction of added mass for an autonomous underwater vehicle moving near sea bottom using panel method. In 2017 4th International Conference on Information Science and Control Engineering, pp. 1094-1098. IEEE.
20. Mackay, E. (2019). Consistent expressions for the free-surface Green function in finite water depth. *Applied Ocean Research*, 93, 101965.
21. Zhang, L., Qiu, B., Ren, L., & Li, X. (2021, March). Numerical Study of Typhoon Resistance of a Floating Wind Turbine. In IOP Conference Series: Earth and Environmental Science (Vol. 687, No. 1, p. 012097). IOP Publishing.
22. Cheng, M. C., & Guan, P. C. (2022). Dynamic behavior analysis of floating wind turbine and anti-rolling design evaluation. The 33th Taiwan Society of Naval Architects and Marine Engineers. Keelung, Taiwan.
23. Shi, H. Y., & Guan, P. C. (2023). Development of half-point high-order panel method for hydrodynamic analysis. 國立臺灣海洋大學碩士論文.

COMBINING HALF-POINT RULE AND ISOGEOMETRIC ANALYSIS FOR HYDRODYNAMIC PERFORMANCE ANALYSIS OF FLOATING OBJECTS

I-Chieh Wang Hui-Yu Shi** Pai-Chen Guan***¹*

* Department of Systems Engineering and Naval Architecture, National Taiwan Ocean University

** Ship and Ocean Industries R&D Center

*** Shih Yen-Ping Center for Underwater Technology, National Taiwan Ocean University

Keywords: Non-uniform B-spline function,, Isogeometric analysis, Half-point quadrature rule, Hydrodynamic

ABSTRACT

In the simulation and analysis of hydrodynamic behavior of floating objects in a flow field, recent studies have started using Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS) functions, which can more accurately describe geometric surfaces, as a geometric approximation, in order to overcome the geometric distortion issue caused by the traditional Hess-Smith panel method due to discretization. Our previous work implemented a higher-order panel method using NURBS for geometric description, combined with Hughes' optimization integral method for NURBS - the half-point rule, for hydrodynamic analysis. In this study, we incorporate Isogeometric Analysis (IGA) using NURBS as the physical field approximation, building upon the foundation of the NURBS-based geometric approximation. We use the same NURBS for both geometry and physical field in a unified manner. Additionally, we combine the Boundary Element Method (BEM) to solve potential flow problems, analyzing the hydrodynamic performance of floating objects.

In the IGA method, the integral domain is partitioned based on the knot span vector. The half-point rule arranges integration points across elements using the continuity of NURBS, enabling the description of object geometry and physical field distribution with fewer integration grids and points, thereby accelerating the analysis process and simplifying computational steps. IGA approximates the physical field using the same NURBS that describes geometry, and interpolates physical quantities from NURBS surface control points to integration points, avoiding singularities in Green's function computation when field points overlap with source points. Finally, through numerical examples involving submerged spheres and cylinders, we compare the convergence trends of hydrodynamic coefficients in the frequency domain under increased NURBS control point density, preliminarily validating the feasibility of this computational approach.