

# 逆有限元素法於船舶結構之非線性結構變形監測

謝旻益 蕭鉅謀 戴名駿<sup>1</sup>

國立成功大學 系統及船舶機電工程學系

關鍵詞：逆有限元素法、結構健康監測、船舶結構、非線性力學

## 摘要

逆有限元素法(iFEM)近年來在結構健康監測領域逐漸受到關注並被視為最佳候選方法之一，該方法基於加權最小平方變分原理並透過目標結構物上有限數量感測器所量測到的即時應變數據來反推整體結構變形與應力分佈。本研究在逆有限元素法框架中使用 iQS4 等參數單元來建構船舶構造中常見的加筋板與曲殼結構，並引入 Cubic Spline 插值方法來減少應變感測器數量以降低結構健康監測系統的建置成本。研究中首先執行不同感測器分佈下加筋板與曲殼結構的數值精度分析，後續再針對上述船舶結構進行線性與非線性的結構變形監測來評估逆有限元素法在結構健康監測工程應用之可行性。

## 前言

逆有限元素法最早由美國太空總署(NASA)開發應用於航空飛行載具的結構健康監測[1-2]，該方法透過感測器所量測到的即時應變數據，配合加權最小平方變分原理來反推整體結構的變形與應力分佈。因此逆有限元素法能有效解決傳統有限元素法在複雜外部環境負荷下結構分析所面臨“如何準確施加外力邊界條件”難題，特別是在海洋、航空以及地震工程領域，此外逆有限元素法數值框架亦具備其他主要優勢如下：

- 無需材料參數以及外力邊界條件資訊
- 幾何邊界位置佈置感測器即可評估整體結構響應
- 受些微干擾量測數據下仍可合理評估結構響應
- 適用大型結構物之結構健康監測
- 具備即時結構健康監測可行性

英國 University of Strathclyde 的 E. Oterkus 研究團隊首先引入逆有限元素法應用於船舶及海洋結構健康監測研究，Kefal 和 Oterkus 分別開發含  $z$  方向旋轉角自由度之 4 節點殼元素(iQS4) [3]、8 節點曲殼元素(iCS8) [4]以及 NURBS 曲殼元素[5]來建構加勁板(Stiffened Plates)與曲殼(Curved Shells)等複雜結構之逆有限元素法數值模型，Kefal 等人[6]進一步提出 3 節點殼元素並搭配 Refined Zigzag 理論(i3-RZT)的數值模型來監測積層板與三明治夾芯板等複

材料力學行為。後續 E. Oterkus 研究團隊利用上述逆有限元素模型進行複雜海洋環境負荷下各類型船舶及海洋結構健康監測，包括：散裝貨船[7]、貨櫃船[8]、以及離岸風機葉片[9]等結構。

## 研究方法

本研究計畫將引入逆有限元素法(inverse Finite Element Method, iFEM)應用於船舶及海洋結構健康監測，該方法建構於有限元素法(FEM)框架下的一階剪切變形板殼理論(First Shear Deformation Plate theory, FSDT)，透過板殼結構上感測器所量測到的真實外部應變數據，配合加權最小平方變分原理及 iQS4 形狀函數來反推整體結構的變形與應力分佈。

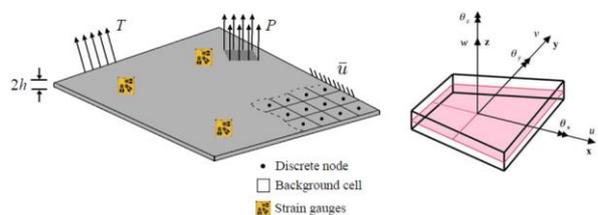


圖 1：逆有限元素法(iFEM)模型及其位移與旋轉定義示意圖

<sup>1</sup> 戴名駿 (mj dai@gs.nuku.edu.tw)

對於船舶及海洋工程領域中常見的板殼結構，一階剪切變形板殼理論僅需在板殼結構厚度方向佈置單一元素進行空間離散處理，再透過幾何中面 (Middle Plane) 的位移 ( $u, v, w$ ) 與旋轉角 ( $\theta_x, \theta_y$ ) 來描述整體板殼結構在三維空間中的變形行為：

$$\begin{aligned} u_x &= u + z\theta_y \\ u_y &= v - z\theta_x \\ u_z &= w \end{aligned}$$

基於線彈性變形假設下，一階剪切變形板殼理論之應變與位移關係表達式如下：

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{aligned}$$

逆有限元素法使用 iQS4 形狀函數來近似板殼結構之位移場，該函數將  $z$  方向旋轉角自由度納入一階剪切變形板殼理論，因此逆有限元素法中板殼結構之應變與位移關係式可以改寫成下列矩陣形式來表達：

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{cases} = \mathbf{e}(\mathbf{u}^e) + z\mathbf{k}(\mathbf{u}^e) + \mathbf{d}(\mathbf{u}^e) = \mathbf{B}^m \mathbf{u}^e + z\mathbf{B}^b \mathbf{u}^e + \mathbf{B}^n \mathbf{u}^e$$

$$\begin{cases} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{cases} = \mathbf{g}(\mathbf{u}^e) = \mathbf{B}^s \mathbf{u}^e$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^e &= [\mathbf{u}_1^e \quad \mathbf{u}_2^e \quad \mathbf{u}_3^e \quad \mathbf{u}_4^e]^T \\ \mathbf{u}_i^e &= [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]^T \quad (i=1,2,3,4) \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{e}$ 、 $\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{g}$  以及  $\mathbf{d}$  分別為正向應變向量、彎矩曲率向量、橫向剪切應變向量和非線性項向量， $\mathbf{B}^m$ 、 $\mathbf{B}^b$ 、 $\mathbf{B}^s$  以及  $\mathbf{B}^n$  分別為平面、彎矩、橫向剪切和和非線性項之 iQS4 形狀函數導數矩陣， $\mathbf{u}^e$  為各元素之六自由度位移向量。

逆有限元素法數值框架中需要透過應變感測器所量測到的外部環境負荷數據來當作輸入參數，因此量測過程中需要同時在板殼結構頂部與底部位置來佈置應變感測器以有效捕捉平面應變  $\mathbf{e}^\epsilon$  與彎矩曲率  $\mathbf{k}^\epsilon$ ，如圖 2 所示，平面應變  $\mathbf{e}^\epsilon$  與彎矩曲率  $\mathbf{k}^\epsilon$  和板殼結構頂部與底部應變數據的關係可以藉由下列方程式來呈現：

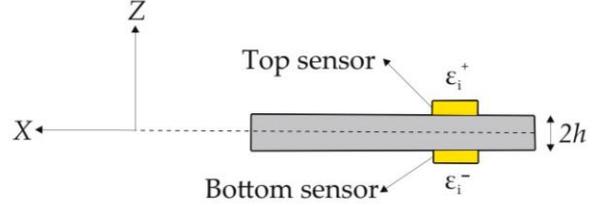


圖 2：逆有限元素法框架中應變感測器佈置示意圖

$$\mathbf{e}_i^\epsilon = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^+ + \epsilon_{xx}^- \\ \epsilon_{yy}^+ + \epsilon_{yy}^- \\ \gamma_{xy}^+ + \gamma_{xy}^- \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_i^\epsilon = \frac{1}{2h} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^+ - \epsilon_{xx}^- \\ \epsilon_{yy}^+ - \epsilon_{yy}^- \\ \gamma_{xy}^+ - \gamma_{xy}^- \end{Bmatrix}_i \quad (i=1, \dots, n)$$

其中  $2h$  為板殼結構厚度， $\epsilon_{ij}^+$  和  $\epsilon_{ij}^-$  分別為板殼結構頂部與底部之應變量測數據。

相較於傳統有限元素方程式在推導過程中所使用基於應變能與外力作功的目標函數，逆有限元素法數值框架則是根據離散網格中數值應變與感測器應變之間的差值平方和來建構目標函數，該目標函數表達式如下：

$$\Phi_e(\mathbf{u}^e) = \frac{1}{A} \int_A (w_e \|\mathbf{e}(\mathbf{u}^e) - \mathbf{e}^\epsilon\|^2 + w_k (2h)^2 \|\mathbf{k}(\mathbf{u}^e) - \mathbf{k}^\epsilon\|^2 + w_g \|\mathbf{g}(\mathbf{u}^e) - \mathbf{g}^\epsilon\|^2) dA$$

其中  $w_e$ 、 $w_k$  以及  $w_g$  分別代表平面、彎矩以及橫向剪切項之加權函數， $\mathbf{e}(\mathbf{u}^e)$ 、 $\mathbf{k}(\mathbf{u}^e)$  以及  $\mathbf{g}(\mathbf{u}^e)$  分別代表平面、彎矩以及橫向剪切項之數值應變， $\mathbf{e}^\epsilon$ 、 $\mathbf{k}^\epsilon$  以及  $\mathbf{g}^\epsilon$  分別代表平面、彎矩以及橫向剪切項之感測器應變， $A$  為離散網格面積。

逆有限元素方程式是透過將基於應變差值的目標函數對位移自由度進行偏微分運算所推導而來，該概念相似於最小二乘擬合數值方法，經由上述推導過程所獲得的逆有限元素方程式可以表示為：

$$\frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u}^e)}{\partial \mathbf{u}^e} = \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}^e = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{k}^e = \frac{1}{A} \int_A (\mathbf{w}_e(\mathbf{B}^m)^T \mathbf{B}^m + \mathbf{w}_k(2h)^2 (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{B}^b + \mathbf{w}_g(\mathbf{B}^s)^T \mathbf{B}^s) dA$$

$$\mathbf{f}^e = \frac{1}{A} \int_A (\mathbf{w}_e(\mathbf{B}^m)^T \mathbf{e}^e + \mathbf{w}_k(2h)^2 (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{k}^e + \mathbf{w}_g(\mathbf{B}^s)^T \mathbf{g}^e) dA$$

其中  $\mathbf{k}^e$ 、 $\mathbf{u}^e$  以及  $\mathbf{f}^e$  分別為各元素之勁度矩陣、位移向量以及外力向量。

觀察勁度矩陣及外力向量可以發現，上述表達式中僅考慮權重  $w$ 、板厚  $2h$ 、 $i\text{QS4}$  形狀函數導數  $\mathbf{B}$  以及感測器所量測到的真實應變數據  $\mathbf{e}^e$ 、 $\mathbf{k}^e$  以及  $\mathbf{g}^e$ 。換句話說，相較於傳統有限元素法，逆有限元素法數值模型僅需憑藉結構幾何資訊以及感測器應變數據即可執行即時結構變形監測，不須額外考慮外力邊界條件以及材料參數等資訊。

基於局部座標系統下的逆有限元素法之元素勁度矩陣  $\mathbf{k}^e$ 、元素位移向量  $\mathbf{u}^e$  以及元素外力向量  $\mathbf{f}^e$  需要分別代入座標系統轉換矩陣  $\mathbf{T}$  以建構全局座標系統下的整體勁度矩陣  $\mathbf{K}$ 、整體位移向量  $\mathbf{U}$  以及整體外力向量  $\mathbf{F}$ ，後續在  $\mathbf{KU}=\mathbf{F}$  線性代數方程組中引入邊界拘束條件使整體勁度矩陣  $\mathbf{K}$  轉換成非奇異矩陣，再將線性代數方程組進行反矩陣運算  $\mathbf{U}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$  即可計算出整體板殼結構之變形分佈來進行結構健康監測：

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^N (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{T}^e, \quad \mathbf{F} = \sum_{e=1}^N (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{f}^e, \quad \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{u}^e$$

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$$

### 數值分析

首先本研究應用逆有限元素法來執行船舶結構之結構健康監測分析，數值模型採用船舶結構中常見有加筋板，該底板結構長、寬和厚度分別為 1、1 和 0.01 公尺，其縱向與橫向加強材長、寬和厚度分別為 1、0.1 和 0.01 公尺。楊氏係數與波松比分別為  $2E11$  與 0.3，加筋板左端設定為固定邊界條件，加筋板底板受  $1E5$  Pa 均勻外力。

需要特別注意的是，逆有限元素法模型所需之感測器應變數據由商用有限元素法軟體來提供，以簡化整體結構健康監測計算流程。圖 3 列出有限元素法與逆有限元素法之加筋板結構變形監測比較結果，兩種數值方法最大變形量分別為 0.038149 與 0.0381，其誤差僅為 0.13%，因此可以確認逆有限元素法模型能夠基於應變感測器數據來準確評估整體加筋板結構變形。

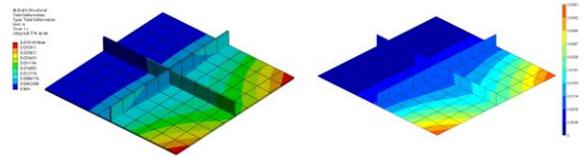


圖 3：有限元素法(左)與逆有限元素法(右)之加筋板結構變形監測比較結果

此外本研究亦應用逆有限元素法來評估板殼結構之非線性力學分析，數值模型採用不含加強材的平板結構，該平板結構與前一數值範例中底板結構在幾何尺寸、材料參數與邊界條件皆相同。

圖 4 列出有限元素法與逆有限元素法之平板結構在不同外力負荷下對應的非線性變形比較結果，比較結果中兩種數值方法外力-位移曲線趨勢相符合，因此可以確認逆有限元素法模型亦能夠基於應變感測器數據來有效評估板殼結構之非線性力學行為。

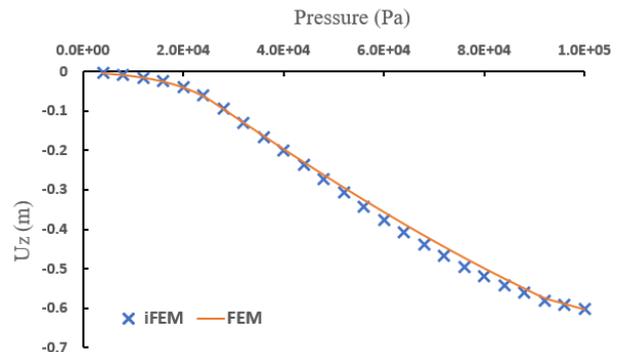


圖 4：有限元素法與逆有限元素法之平板結構非線性變形監測比較結果

## 參考文獻

1. A. Tessler, J.L. Spangler. A Variational Principal for Reconstruction of Elastic Deformation of Shear Deformable Plates and Shells. NASA TM-2003-212445; NASA, Langley Research Center: Hampton, VA, USA, 2003.
2. A. Tessler, J.L. Spangler. A Least-Squares Variational Method for Full-Field Reconstruction of Elastic Deformations in Shear-Deformable Plates and Shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 194: 327-339, 2005.
3. A. Kefal, E. Oterkus, A. Tessler, J.L. Spangler. A Quadrilateral Inverse Shell Element with Drilling Degrees of Freedom for Shape Sensing and Structural Health Monitoring. *Eng. Sci. Technol. Int. J.*, 19: 1299-1313, 2016.
4. A. Kefal. An Efficient Curved Inverse-Shell Element for Shape Sensing and Structural Health Monitoring of Cylindrical Marine Structures. *Ocean Eng.*, 188: 106262, 2019.
5. A. Kefal, E. Oterkus. Isogeometric iFEM Analysis of Thin Shell Structures. *Sensors*, 20: 2685, 2020.
6. A. Kefal, A. Tessler, E. Oterkus. An Enhanced Inverse Finite Element Method for Displacement and Stress Monitoring of Multilayered Composite and Sandwich Structures. *Compos. Struct.*, 179: 514-540, 2017.
7. A. Kefal, J.B. Mayang, E. Oterkus, M. Yildiz. Three Dimensional Shape and Stress Monitoring of Bulk Carriers Based on iFEM Methodology. *Ocean Eng.*, 147: 256-267, 2018.
8. A. Kefal, E. Oterkus. Displacement and Stress Monitoring of a Panamax Containership using Inverse Finite Element Method. *Ocean Eng.*, 119: 16-29, 2016.
9. M. Li, Y. Dirik, E. Oterkus, S. Oterkus. Shape Sensing of NREL 5 MW Offshore Wind Turbine Blade using iFEM Methodology. *Ocean Eng.*, 273: 114036, 2023.